

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅 
管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
园龄：4年7个月
粉丝：288
关注：5
+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

 找找看
 谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

积分 - 457097
排名 - 1198

单变量微积分笔记24——分部积分

不是所有被积函数都能解析地写出原函数。对于那些可能写出来的函数，也需要一定的积分技巧才能随心所欲，分部积分正是其中很重要的一种技巧。

基本公式

部分积分演变自积分的乘法法则：

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$uv' = (uv)' - u'v$$

$$\int uv' dx = \int (uv)' dx - \int u'v dx = uv - \int u'v dx$$

$$\int_a^b uv' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b u'v dx$$

示例1

$$\int \ln x dx = ?$$

看起来很难对付，现在尝试用部分积分解决。

$$\text{令 } u = \ln x, \quad u' = (\ln x)' = x' / x = 1/x$$

$$\text{令 } v' = 1, \quad v = x, \quad u'v = 1$$

$$\int \ln x dx = \int (\ln x)(x)' dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

示例2

$$\int (\ln x)^2 dx = ?$$

解法1：

$$\text{令 } u = (\ln x)^2, \quad u' = 2 \ln x / x$$

$$\text{令 } v' = 1, \quad v = x, \quad u'v = 2 \ln x / x$$

$$\int (\ln x)^2 dx = (\ln x)^2 x - \int \frac{2 \ln x}{x} x dx$$

$$= (\ln x)^2 x - 2 \int \ln x dx$$

$$= (\ln x)^2 x - 2(x \ln x - x)C$$

解法2：

随笔分类 (211) ★★资源下载★★(1) Java并发编程(1) 程序员的数学(24) 单变量微积分(31) 多变量微积分(24) 概率(24) 机器学习(27) 软件设计(1) 数据分析(6) 数据结构与算法(27) 随笔(5) 线性代数(34) 项目管理(2) 转载(4) 随笔档案 (205) 2021年2月(1) 2020年3月(2) 2020年2月(6) 2020年1月(4) 2019年12月(7) 2019年11月(15) 2019年9月(3) 2019年8月(6) 2019年7月(1) 2019年6月(8) 2019年5月(3) 2019年4月(5) 2019年3月(7) 2019年2月(3) 2019年1月(7) 更多 阅读排行榜 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (2976 8) 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772) 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430) 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099) 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772) 评论排行榜 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8) 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7) 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7) 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5) 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4) 推荐排行榜 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7) 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7) 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6) 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5) 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5) 最新评论 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积) 如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90° --猫猫猫猫猫大人

令 $u = \ln x$, $u' = (\ln x)' = x' / x = 1/x$

$v' = \ln x$, 通过示例1得知, $v = x \ln x - x$

$u' v = \ln x - 1$

$$\begin{aligned}\int (\ln x)^2 dx &= (\ln x)(x \ln x - x) - \int \frac{x(\ln x) - x}{x} dx \\ &= x(\ln x)^2 - x \ln x - \left(\int \ln x dx - \int dx \right) \\ &= x(\ln x)^2 - x \ln x - (x \ln x - x - x + C) \\ &= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C\end{aligned}$$

换算公式

换算公式使用递归的方式运用部分积分公式, 最终得到结果。

$\int (\ln x)^n dx = ?$

这与前面的示例类似:

令 $u = (\ln x)^n$, $u' = n(\ln x)^{n-1}/x$

令 $v' = 1$, $v = x$, $u' v = n(\ln x)^{n-1}$, $uv = x (\ln x)^n$

$$\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx$$

再对后半部分反复使用分部积分, 使 $\ln x$ 降次, 直到其为0为止。如果用 $F_n(x)$ 表示 $(\ln x)^n$ 的积分, 则:

$$F_n(x) = \int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - nF_{n-1}(x)$$

根据该公式:

$$F_0(x) = x + C$$
$$F_1(x) = \int \ln x dx = x \ln x - \int (\ln x)^0 dx = x \ln x - x + C$$
$$F_2(x) = \int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2F_1 = x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + C$$

.....

示例1

$\int x^n e^x dx = ?$

令 $u = x^n$, $u' = nx^{n-1}$

令 $v' = e^x$, $v = e^x$, $u' v = nx^{n-1}e^x$, $uv = x^n e^x$

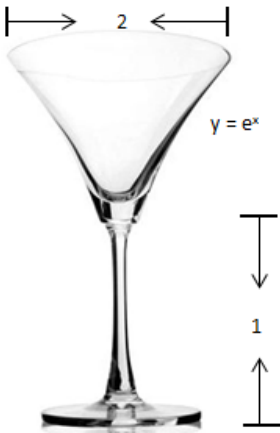
2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵
--wiki3D
3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos)很nice
--尹保棕
4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)有些图片挂了呢
--ccchendada
5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程提个issue，最速降线中 $v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系
--trustInU

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$$
$$F_n(x) = \int x^n e^x dx = x^n e^x - n F_{n-1}(x)$$
$$F_0(x) = e^x$$
$$F_1(x) = x e^x - e^x + C$$
$$F_2(x) = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C$$

.....

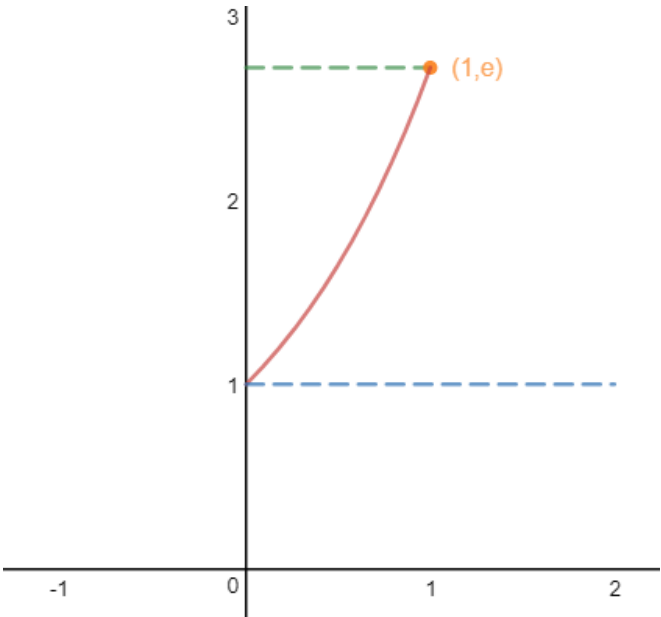
示例2

有如下图所示的高脚杯，其侧壁的曲线函数是 $y = e^x$ ，开口宽度为2，手柄高度为1，求高脚杯的容积。



求高脚杯容积

首先将其转换为下图所示的数学模型，容积就是曲线绕y轴旋转一周的体积：



可以使用圆盘法和壳层法计算体积（可参考[数学笔记17——定积分的应用2（体积）](#)）。

圆盘法：

$$\begin{aligned}
 V &= \int_1^e \pi x^2 dy \\
 &= \int_1^e \pi (\ln y)^2 dy = \pi [y(\ln y)^2 - 2(x \ln y - y)] \Big|_1^e = \pi(e - 2)
 \end{aligned}$$

壳层法:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^1 2\pi x(e - y) dx \\
 &= \int_0^1 2\pi x(e - e^x) dx \\
 &= 2\pi \left(\int_0^1 x e dx - \int_0^1 x e^x dx \right) \\
 &= 2\pi \left(\frac{ex^2}{2} - (xe^x - e^x) \right) \Big|_0^1 \\
 &= \pi(e - 2)
 \end{aligned}$$

综合示例

示例1

$$\int x e^{-x} dx = ?$$

$$\text{令 } u = x, \quad u' = 1$$

$$\text{令 } v' = e^{-x}, \quad v = -e^{-x}, \quad u' v = -e^{-x}, \quad uv = -xe^{-x}$$

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - \int -e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C$$

示例2

$$\int \frac{x^3}{(1+x^2)^2} dx = ?$$

解法1: 分部积分

$$u = x^2, \quad v' = \frac{x}{(1+x^2)^2} \quad v = \frac{-1}{2(1+x^2)} \quad u' = 2x$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3}{(1+x^2)^2} dx &= \frac{-x^2}{2(1+x^2)} - \int \frac{-2x}{2(1+x^2)} dx \\
 &= \frac{-x^2}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C
 \end{aligned}$$

解法2: 部分分式

$$\frac{x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{Cx+D}{(1+x^2)^2}$$

$$x^3 = (Ax+B)(1+x^2) + Cx + D = Ax^3 + Ax + B + Bx^2 + Cx + D$$

$$\Rightarrow A=1, B=0, D=0, C=-1$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{(1+x^2)^2} dx &= \int \frac{x}{1+x^2} dx + \int \frac{-x}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2(1+x^2)} + C\end{aligned}$$

解法3：三角替换，令 $x = \tan\theta$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{(1+x^2)^2} dx &= \int \frac{\tan^3\theta}{(1+\tan^2\theta)^2} d\tan\theta \\ &= \int \frac{\tan^3\theta}{(\sec^2\theta)^2} \sec^2\theta d\theta \\ &= \int \frac{\tan^3\theta}{\sec^2\theta} d\theta \\ &= \int \frac{\tan\theta \sin^2\theta / \cos^2\theta}{1/\cos^2\theta} d\theta \\ &= \int \tan\theta \sin^2\theta d\theta \\ &= \int \tan\theta (1 - \cos^2\theta) d\theta \\ &= \int (\tan\theta - \cos\theta \sin\theta) d\theta \\ &= \int \tan\theta d\theta - \int -\cos\theta d\cos\theta \\ &= -\ln(\cos\theta) + \frac{\cos^2\theta}{2} + C \\ &= -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2(1+x^2)} + C\end{aligned}$$

注意到解法1和后两种方法的结果不同，但由于 $\frac{-x^2}{2(1+x^2)}$ 和 $\frac{1}{2(1+x^2)}$ 的导数相同，所以二者是等同的。

也可以从另一个角度证明，现在回顾一下解法3：

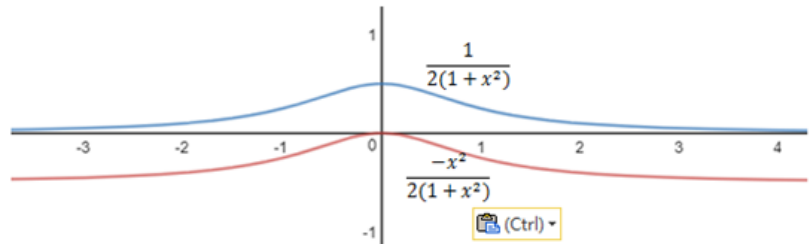
$$\int (\tan\theta - \cos\theta \sin\theta) d\theta = \int \tan\theta d\theta - \int -\cos\theta d\cos\theta$$

如果替换为 $\sin\theta$ 的函数，则：

$$\begin{aligned}
 \int (\tan\theta - \cos\theta\sin\theta)d\theta &= \int \tan\theta d\theta - \int \sin\theta d\sin\theta \\
 &= -\ln(\cos\theta) - \frac{\sin^2\theta}{2} + C \\
 &= -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \frac{x^2}{2(x^2+1)} + C \\
 &= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2(x^2+1)} + C
 \end{aligned}$$

所以两个结果相等。

实际上两个函数是同族的：



示例3

$$\int \arctan x dx = ?$$

$$u = \arctan x, u' = 1/(1+x^2), v' = 1, v = x$$

下面是arctanx的求导过程：

$y = \arctan x, x = \tan y$, 对 $x = \tan y$ 两边同时对 x 求导：

$$x' = \frac{d \tan y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$1 = (\sec^2 y) y'$$

$$y' = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

关于反函数的求导，可参考[数学笔记4——导数4（反函数的导数）](#)。

$$\begin{aligned}
 \int \arctan x dx &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\
 &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C
 \end{aligned}$$

示例4

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = ?$$

$$u = \ln x, u' = 1/x, v' = x^{-2}, v = -1/x.$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{-\ln x}{x} - \int \frac{-1}{x^2} dx = \frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

示例5

$$\int \sin^n x dx = ?$$

$$u = \sin^{n-1} x, \quad u' = (n-1) \cos x \sin^{n-2} x$$

$$v' = \sin x, \quad v = -\cos x$$

$$F_n(x) = \int \sin^n x dx = \int uv' dx = uv - \int u' v dx$$

$$\int u' v dx = (n-1) \int (-\cos^2 x) \sin^{n-2} x dx$$

$$= (n-1) \int (\sin^2 x - 1) \sin^{n-2} x dx$$

$$= (n-1) \int (\sin^n x - \sin^{n-2} x) dx$$

$$= (n-1) \left(\int \sin^n x dx - \int \sin^{n-2} x dx \right)$$

$$= (n-1) (F_n(x) - F_{n-2}(x)) + C$$

$$F_n(x) = -\sin^{n-1} x \cos x - (n-1) (F_n(x) - F_{n-2}(x))$$

$$\Rightarrow F_n(x) = \frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{(n-1)F_{n-2}(x)}{n} + C$$

出处: 微信公众号 "我是8位的"

本文以学习、研究和分享为主, 如需转载, 请联系本人, 标明作者和出处, 非商业用途!

扫描二维码关注作者公众号 "我是8位的"



随笔

分类: [单变量微积分](#)

标签: [分部积分](#)

好文要顶

关注我

收藏该文



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

0

推荐

0

反对

[+加关注](#)

« 上一篇: [单变量微积分笔记23——部分分式](#)
» 下一篇: [单变量微积分笔记25——弧长和曲面面积](#)

posted on 2017-11-23 22:42 我是8位的 阅读(3123) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

 登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告

yzodcs.com

永中DCS_文档在线预览解决方案

兼容不同版本的Office、PDF等, 特定格式的合作, 支持Windows、信创环境下一键部署

打开

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手锏 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

活动时间: 2022年3月8日-3月18日



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
 - 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推 “杀手级” 功能, 可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人: 本金63万, 月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:

博客园

Copyright © 2022 我是8位的

Powered by .NET 6 on Kubernetes